LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 10

Man betrachtet immer einen Körper K.

1. a) Man zeige, dass die Inverse einer linearen bijektiven Abbildung ist auch linear.
b) Man zeige, dass ob die Zusammengesetzung zweier linearen Abbildung definiert ist, dann ist sie linear auch.

2. Man betrachte zwei Vektorräume V und W, und $f : V \to W$ eine Lineare Abbildung. Man zeige:

a) Sind $x_1, \ldots, x_n \in V$ linear unabhängig und ist f injektiv, so sind $f(x_1), \ldots, f(x_n) \in W$ linear unabhängig.
b) Ist $X \subseteq V$, so gilt $f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle$.
c) Gilt $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = V$, für $x_1, \ldots, x_n \in V$, und ist f surjektiv, so gilt $f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = W$.
d) F sit genau dann bijektiv wenn sie jede Basis von V in einer Basis von W sendet.

3. Man betrachte zwei Vektorräume V und W. Man bezeichne

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ linear ist}\}.$$

Man zeige, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein K-Vektorraum ist, bezüglich der Addition

$$(f, g) \mapsto f+g, \text{ wobei } f+g : V \to W, (f+g)(x) = f(x)+g(x), \text{ für alle } x \in V,$$

und der Skalarmultiplikation

$$(\alpha, f) \mapsto \alpha f, \text{ wobei } \alpha f : V \to W, (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ für alle } x \in V.$$

4. a) Man betrachte zwei Vektorräume V und W, und $f : V \to W$ eine Lineare Abbildung. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist surjektiv.
(ii) Existiert eine lineare Abbildung $s : W \to V$, so dass $f \circ s = 1_W$.
(iii) Für jede K-Vektorraum U und jede lineare Abbildung $g : U \to W$ eine lineare Abbildung $h : U \to V$ existiert, so dass $f \circ h = g$.

b) Man zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_3)$ ist linear und surjektiv, und finde man eine lineare Abbildung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ so dass $f \circ s = 1_{\mathbb{R}^2}$.

5. a) Man betrachte zwei Vektorräume V und W, und $f : V \to W$ eine Lineare Abbildung. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist injektiv.

(ii) Existiert eine lineare Abbildung $r : W \to V$, so dass $r \circ f = 1_V$.
(iii) Für jede K-Vektorraum U und jede lineare Abbildung $g : V \to U$ eine lineare Abbildung $h : W \to U$ existiert, so dass $h \circ f = g$.

b) Man zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 2x_1)$ ist linear und injektiv, und finde man eine lineare Abbildung $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ so dass $r \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$.

6. Ist V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so sind die folgende Aussagen äquivalent:
(i) f ist injektiv.
(ii) f ist surjektiv.
(iii) f ist bijektiv.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien
E-mail address, George Ciprian Modoi: cmodoi@math.ubbcluj.ro